Universidad De Los Lagos
Departamento de Ciencias Exactas
Pedagogía en Matemática y Computación

Geometría 1 - 2015
Profesora: Cecilia Planas
Ayudante: Samuel Fuentes



Contenidos Ayudantía #5

La ayudantía 5 es el jueves 12 de noviembre a las 14.15h en la sala E 203. Resolveremos ejercicios usando demostración por afirmaciones y razones, relacionados con postulados, definiciones y teoremas de Congruencia de $\triangle$s, Perpendicularidad y Desigualdades Geométricas:

Congruencia de Triángulos

Definición 1. Dada una correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ entre dos triángulos decimos que es una correspondencia lado-ángulo-lado o abreviadamente LAL si dos lados del $\triangle ABC$ y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes con las partes correspondientes del $\triangle DEF$

Definición 2. Dada una correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ entre dos triángulos decimos que es una correspondencia ángulo-lado-ángulo o abreviadamente ALA si dos ángulos del $\triangle ABC$ y el lado comprendido entre ellos son congruentes con las partes correspondientes del $\triangle DEF$

Definición 3. Dada una correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ entre dos triángulos decimos que es una correspondencia lado-lado-lado o abreviadamente LLL si los lados correspondientes son congruentes.

Postulado 1 (Postulado LAL)**.** Toda correspondencia LAL es una congruencia.

Teorema 1 (Teorema ALA)**.** Toda correspondencia ALA es una congruencia.

Definición 4. Un triángulo es escaleno si ninguno de sus lados es congruente con otro de sus lados.

Definición 5. Un triángulo es isósceles si al menos dos de sus lados son congruentes.

Definición 6. Un triángulo es equilátero si sus tres lados son congruentes

Teorema 2 (del triángulo isósceles)**.** Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a éstos son congruentes. Es decir, en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.

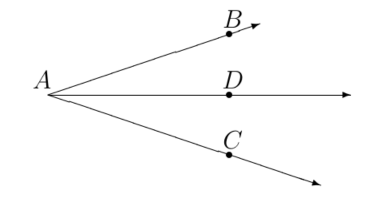
- **Corolario 17.1.** (del triángulo equilátero) Todo triángulo equilátero tiene sus tres ángulos congruentes.

Teorema 3 (recíproco del teorema del $\triangle$ isósceles)**.** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos son congruentes.

- **Corolario 18.1.** Todo triángulos que tiene todos sus ángulos congruentes es equilátero.

Teorema 4 (Teorema LLL)**.** Toda correspondencia LLL es una congruencia.

Definición 7. Si D está en el interior del $\angle BAC$ y $\angle BAD \cong \angle CAD$, entonces el rayo $\overrightarrow{AD}$ biseca al $\angle BAC$ y se llama la bisectriz del $\angle BAC$.



Teorema 5 (de la bisectriz)**.** Todo ángulo tiene solamente una bisectriz.

Teorema 6. Todos los puntos de la bisectriz de un ángulo diferentes del extremo están en el interior del ángulo.

Perpendicularidad

Teorema 7. Dada una recta l y un punto Q que no está en ella. Existe solamente una recta l' perpendicular a l tal que $Q \in l'$.

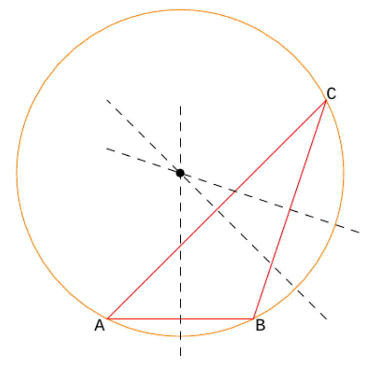
- **Corolario 22.1.** Ningún triángulo tiene dos ángulos rectos diferentes. Es decir si un ángulo de un triángulo es recto, entonces los otros dos no son rectos.

Definición 8. Un triángulo rectángulo es un triángulo en el cual uno de sus ángulos es recto.

Definición 9. Una mediatriz de un segmento es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.

- **Corolario** (del teorema de la mediatriz) Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto común, el cual es el centro de la única circunferencia a la que pertenecen los tres vértices del triángulo.

Definición 10. La circunferencia a la cual pertenecen los vértices de un $\triangle ABC$ se dice que está circunscrita en el triángulo. Al centro de tal circunferencia se le llama circuncentro del $\triangle ABC$.



Por el corolario anterior, se concluye que el circuncentro de un triángulo es el punto de intersección de las mediatrices de los lados.

Definición 11. Una recta dada y un plano son perpendiculares si se intersecan y además toda recta en el plano que pasa por el punto de intersección es perpendicular a la recta dada. Cuando una recta l y un plano Π son perpendiculares escribimos $l \perp \Pi$.

Lema 1. Si B, C, P, Q son cuatro puntos diferentes tales que $PB = QB$, $PC = QC$ y X es un punto entre B y C, entonces $PX = QX$.

Teorema 8. Si una recta l es perpendicular a dos rectas diferentes l_1 y l_2 que se intersecan, entonces l es perpendicular al plano que incluye a las dos rectas l_1 y l_2.

Teorema 9. Sea l una recta y $P \in l$. Existe un plano Π tal que $l \perp \Pi$ y $P \in \Pi$.

Teorema 10. Si una recta dada y un plano son perpendiculares, entonces el plano incluye a toda recta perpendicular a la recta dada en su punto de intersección.

Teorema 11. Dados una recta y un punto en la recta, existe solamente un plano perpendicular a la recta al cual pertenece el punto.

Teorema 12 (Del plano bisecante perpendicular)**.** El plano bisecante perpendicular de un segmento es el conjunto de todos los puntos equidistantes de los extremos del segmento.

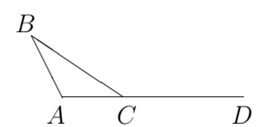
Teorema 13. Dos rectas perpendiculares al mismo plano son coplanarias

Desigualdades Geométricas

Definición 12. Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, decimos que el segmento $\overline{AB}$ es mayor que el segmento $\overline{CD}$, denotado $\overline{AB} > \overline{CD}$, si $AB > CD$. Si $\overline{AB} > \overline{CD}$ también decimos que $\overline{CD}$ es menor que $\overline{AB}$ y los denotamos como $\overline{CD} < \overline{AB}$.

Definición 13. Dados dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle DEF$, decimos que $\angle ABC$ es mayor que $\angle DEF$, denotado $\angle ABC > \angle DEF$ si $m\angle ABC > m\angle DEF$. Si $\angle ABC > \angle DEF$ también decimos que el ángulo $\angle DEF$ es menor que el ángulo $\angle ABC$ y lo denotamos así: $\angle DEF < \angle ABC$.

Definición 14. En un triángulo $\triangle ABC$ si $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CD}$ son rayos opuestos, decimos que el ángulo $\angle BCD$ es un ángulo externo del $\triangle ABC$. Además a los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BAC$ se les llaman ángulos internos no contiguos al $\angle BCD$. Al $\angle ACB$ se le llama ángulo interno contiguo al $\angle BCD$.



Teorema 14 (del ángulo externo.)**.** Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de sus ángulos internos no contiguos.

Definición 15. Decimos que un ángulo es agudo si mide menos de 90^o y que es obtuso si mide más de 90^o.

- **Corolario 29.1.** Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces los otros dos ángulos son agudos.

- **Corolario 29.2.** Si un triángulo tiene un ángulo obtuso, entonces los otros dos ángulos son agudos.

- **Corolario 29.3.** En cualquier triángulo al menos dos de sus ángulos son agudos.

Definición 16. Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia entre dos triángulos. Si $AB = DE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ y $\angle BCA \cong \angle EFD$, entonces decimos que es una correspondencia lado-ángulo-ángulo, o LAA.

Teorema 15 (Teorema LAA)**.** Toda correspondencia LAA es una congruencia.

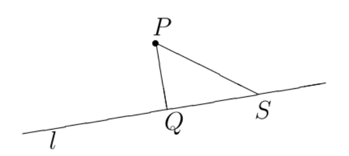
Definición 17. En un triángulo rectángulo al lado opuesto al ángulo recto se le llama hipotenusa, y a cada lado adyacente al angulo recto se le llama cateto.

Teorema 16 (de la hipotenusa y el cateto)**.** Dada una correspondencia entre dos triángulos tal que las hipotenusas de ambos son correspondientes. Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo, entonces la correspondencia es una congruencia.

Teorema 17. Si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados no son congruentes y el ángulo mayor es el opuesto al lado mayor.

Teorema 18. Si dos ángulos de un triángulos no son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos no son congruentes y el lado mayor es opuesto al ángulo mayor.

Teorema 19 (1^{er} teorema de la distancia mínima)**.** Sea l una recta, P un punto que no está en ella, $Q \in l$ tal que $\overline{PQ} \perp l$, y $S \in l$ tal que $S \neq Q$. Tenemos que $PQ < PS$.
Dicho de otra manera, el segmento más corto que une un punto con una recta es el segmento perpendicular a la recta.



Definición 18. Sea l una recta y P un punto que no está en ella. Definimos la distancia entre P y l como la longitud del segmento $\overline{PQ}$ tal que $Q \in l$ y $\overline{PQ} \perp l$.

Teorema 20 (Desigualdad del triángulo)**.** Sea $\triangle ABC$ un triángulo: $AB + BC > AC$

Definición 19. Una circunferencia y una recta incluidas en un mismo plano se dice que son tangentes si su intersección tiene solamente un punto. En estas condiciones también se dice que una es tangente a la otra en el punto de intersección. También decimos que un segmento es tangente a una circunferencia cuando se intersecan y la recta que contiene al segmento es tangente a la circunferencia.

Teorema 21. Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto

Teorema 22 (recíproco del anterior)**.** Una recta perpendicular a un radio en su extremo es tangente a la circunferencia

Teorema 23 (de la bizagra)**.** Sean $\triangle ABC$ y $\triangle ABC'$ dos triángulos tales que C y C' están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, $BC = BC'$ y $\angle ABC < \angle ABC'$. El segmento $\overline{AC'}$ es más largo que el segmento $\overline{AC}$.

